
ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 7: Familles libres et génératrices d'espaces vectoriels

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) **vérifier ou construire des familles libres et/ou génératrices** d'un espace vectoriel ;
- (O.2) **extraire une base** d'une famille génératrice et **compléter en une base** une famille libre d'un espace vectoriel ;
- (O.3) **calculer le noyau et l'image d'une application linéaire, ainsi que des bases de ces sous-espaces vectoriels.**

Nouveau vocabulaire dans cette série

- base
- dimension
- noyau d'une matrice
- image d'une matrice



Noyau d'exercices

1.1 Preuve d'un résultat du cours

Exercice 1 (Extension d'une famille libre)

Soient V un espace vectoriel, $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ une famille libre de vecteurs de V et $v_0 \notin \text{Vect } \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}' = \{v_0\} \cup \mathcal{F} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ est aussi une famille libre de V

1.2 Premiers exemples de bases

Exercice 2 (Base de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$)

On rappelle que $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel de matrices carrées de taille 2 avec coefficients dans \mathbb{R} .

(a) Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la partie de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ formée par les trois matrices A , B et C est libre.

- (b) Trouver une matrice $D \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ telle que $\{A, B, C, D\}$ soit une base de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (Base de \mathbb{P}_3)

On rappelle que \mathbb{P}_3 désigne l'espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans \mathbb{R} .

- (a) Considérons les familles de polynômes

$$\mathcal{F}_1 = \{1 - t^2, t^2, t\} \text{ et } \mathcal{F}_2 = \{1 + t + t^2, t + t^2, t^2\}.$$

Déterminer si \mathcal{F}_1 et/ou \mathcal{F}_2 est une famille libre de \mathbb{P}_3 .

- (b) La famille \mathcal{F}_2 est-elle une base de \mathbb{P}_3 ?

Exercice 4 (Extraction de base à partir d'une famille génératrice)

Trouver une base du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (Extraction d'une base à partir d'une famille génératrice et complétion d'une famille libre en une base)

- (a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $W = \text{Vect} \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de \mathbb{R}^2 , avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Trouver une partie $\mathcal{B} \subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ telle que \mathcal{B} soit une base de W .
 (c) Trouver une base \mathcal{B}' de W satisfaisant $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathcal{B}'$.

Exercice 6 (Dimension d'un sous-espace de \mathbb{R}^4)

On considère le sous espace vectoriel

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

de \mathbb{R}^4 . Déterminer la dimension de W .

1.3 Bases de noyaux et d'images d'applications linéaires

Exercice 7 (Noyau et image d'une matrice I)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de $\text{Ker}(A)$ et de $\text{Im}(A)$.



Pour compléter la pratique

2.1 Premiers exemples de bases

Exercice 8 (Espace vectoriel de dimension infinie)

Montrer que la dimension de l'espace vectoriel \mathbb{P} formé des polynômes à coefficients réels est infinie.

2.2 Bases de noyaux et d'images d'applications linéaires

Exercice 9 (Noyau et image d'une matrice II)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Trouver une base de $\text{Ker}(A)$.
- (b) On note $T_A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application donnée par $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$. L'application T_A est-elle injective ? Et surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 10 (Noyau et image d'une matrice III)

Soit \mathbb{P}_2 l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix},$$

pour tout $p \in \mathbb{P}_2$.

- (a) Vérifier que T est linéaire.
- (b) Trouver une base de $\text{Ker}(T)$.
- (c) Trouver une base de $\text{Im}(T)$.