

---

# ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

## Semestre d'automne — 2024-2025

### Série 7: Familles libres et génératrices d'espaces vectoriels

---

#### Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) vérifier ou construire des familles libres et/ou génératrices d'un espace vectoriel ;
- (O.2) extraire une base d'une famille génératrice et compléter en une base une famille libre d'un espace vectoriel ;
- (O.3) calculer le noyau et l'image d'une application linéaire, ainsi que des bases de ces sous-espaces vectoriels.

#### Nouveau vocabulaire dans cette série

- base
- dimension
- noyau d'une matrice
- image d'une matrice



## Noyau d'exercices

### 1.1 Preuve d'un résultat du cours

#### Exercice 1 (Extension d'une famille libre)

Soient  $V$  un espace vectoriel,  $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  une famille libre de vecteurs de  $V$  et  $v_0 \notin \text{Vect } \mathcal{F}$ . Montrer que  $\mathcal{F}' = \{v_0\} \cup \mathcal{F} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  est aussi une famille libre de  $V$

### 1.2 Premiers exemples de bases

#### Exercice 2 (Base de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ )

On rappelle que  $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel de matrices carrées de taille 2 avec coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

- (a) Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la partie de  $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  formée par les trois matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  est libre.

- (b) Trouver une matrice  $D \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  telle que  $\{A, B, C, D\}$  soit une base de  $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 3 (Base de  $\mathbb{P}_3$ )**

On rappelle que  $\mathbb{P}_3$  désigne l'espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

- (a) Considérons les familles de polynômes

$$\mathcal{F}_1 = \{1 - t^2, t^2, t\} \text{ et } \mathcal{F}_2 = \{1 + t + t^2, t + t^2, t^2\}.$$

Déterminer si  $\mathcal{F}_1$  et/ou  $\mathcal{F}_2$  est une famille libre de  $\mathbb{P}_3$ .

- (b) La famille  $\mathcal{F}_2$  est-elle une base de  $\mathbb{P}_3$  ?

**Exercice 4 (Extraction de base à partir d'une famille génératrice)**

Trouver une base du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5 (Extraction d'une base à partir d'une famille génératrice et complétion d'une famille libre en une base)**

- (a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel  $W = \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , avec

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Trouver une partie  $\mathcal{B} \subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  telle que  $\mathcal{B}$  soit une base de  $W$ .

- (c) Trouver une base  $\mathcal{B}'$  de  $W$  satisfaisant  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathcal{B}'$ .

**Exercice 6 (Dimension d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^4$ )**

On considère le sous espace vectoriel

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

de  $\mathbb{R}^4$ . Déterminer la dimension de  $W$ .

### 1.3 Bases de noyaux et d'images d'applications linéaires

**Exercice 7 (Noyau et image d'une matrice I)**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de  $\text{Ker}(A)$  et de  $\text{Img}(A)$ .



## Pour compléter la pratique

### 2.1 Premiers exemples de bases

#### Exercice 8 (Espace vectoriel de dimension infinie)

Montrer que la dimension de l'espace vectoriel  $\mathbb{P}$  formé des polynômes à coefficients réels est infinie.

### 2.2 Bases de noyaux et d'images d'applications linéaires

#### Exercice 9 (Noyau et image d'une matrice II)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Trouver une base de  $\text{Ker}(A)$ .
- (b) On note  $T_A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application donnée par  $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ . L'application  $T_A$  est-elle injective ? Et surjective ? Justifier votre réponse.

#### Exercice 10 (Noyau et image d'une matrice III)

Soit  $\mathbb{P}_2$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère la transformation  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix},$$

pour tout  $p \in \mathbb{P}_2$ .

- (a) Vérifier que  $T$  est linéaire.
- (b) Trouver une base de  $\text{Ker}(T)$ .
- (c) Trouver une base de  $\text{Img}(T)$ .